E.N.S.I. DE PHYSIQUE & DE MECANIQUE 1983

Programme M **PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES** (4 h)

N.B. — *Il est demandé* **expressément** *aux candidats de donner des démonstrations* **claires, concises** *et* **rigoureuses**. *Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.*

Les candidats doivent respecter les notations du texte et peuvent admettre le résultat d'une question non résolue pour traiter les questions suivantes. Les parties II et III sont indépendantes de la partie I. Les résultats des parties I et III sont utilisés dans la partie IV.

I

$\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$ – espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, à une indéterminée; $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n (n étant un entier naturel).

On note M et D les endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$ définis par

$$M(P)(X) = \frac{1}{2}\,(P(X+1) + P(X))$$

$$D(P)(X) = P'(X)$$

où P est un élément de $\mathbb{R}[X]$ et P' le polynôme dérivé de P. (P (X + 1) désigne le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ obtenu en remplaçant dans le polynôme P l'indéterminée X par X + 1).

1°) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, P non nul, montrer que : $d^\circ M(P) = d^\circ P$.

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_n[X]$ et que M est une bijection.

Dans la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désignera par E_n, le polynôme unique de $\mathbb{R}[X]$ défini par : $M(E_n)(X) = \dfrac{X^n}{n!}$.

2°) *a*) Montrer que :

(*i*) $E_0(X) = 1$.

(*ii*) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad E_n(0) + E_n(1) = 0$.

(*iii*) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad D(E_n) = E_{n-1}$

b) Calculer E_1, E_2, E_3, E_4, E_5.

c) Montrer que les conditions (*i*), (*ii*), (*iii*) ci-dessus, caractérisent la suite de polynômes $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3°) *a*) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$E_n(1 - X) = (-1)^n E_n(X)$$

En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$E_{2p}(0) = E_{2p}(1) = 0$$

$$E_{2p-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

b) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, 0 et 1 sont les seules racines de E_{2p} dans [0, 1] et $\frac{1}{2}$ la seule racine de E_{2p+1} dans [0, 1].

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le sens de variation et le signe de E_n sur [0, 1] et montrer que $(-1)^{p+1} E_{2p+1}(0) > 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Dans la suite, pour tout entier naturel n, on note : $e_n = E_n(0)$.

4°) *a*) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$E_n(X) = \sum_{k=0}^{n} e_k \frac{X^{n-k}}{(n-k)!}$$

.../...

b) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$e_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{e_0}{n!} + \frac{e_1}{(n-1)!} + \cdots + \frac{e_{n-1}}{1!}\right)$$

En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $|e_n| \leqslant 1$.

5°) Soit f une application de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. (On note $f^{(n)}$ la dérivée n^{ième} de f.)

a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, et pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_0^1 E_{2k+2}(x) f^{(2k+3)}(x+u)\,dx = e_{2k+1}\left[f^{(2k+1)}(u+1) + f^{(2k+1)}(u)\right] + \int_0^1 E_{2k}(x) f^{(2k+1)}(x+u)\,dx.$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $u \in \mathbb{R}$, il existe $\xi \in [0, 1]$ tel que :

$$f(u) = \frac{1}{2}\left[f(u+1) + f(u)\right] + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} e_{2k+1}\left[f^{(2k+1)}(u+1) + f^{(2k+1)}(u)\right] + R_{2n+1}$$

$$\text{avec } R_{2n+1} = e_{2n+1} f^{(2n+1)}(u+\xi).$$

c) Montrer que, si de plus, les dérivées d'ordre impair de f sont positives (resp. négatives) sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(2k+1)}(x) \geqslant 0$ (resp. $f^{(2k+1)}(x) \leqslant 0$)) alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $u \in \mathbb{R}$, il existe $\theta \in [0, 1]$ tel que :

$$R_{2n+1} = \frac{\theta}{2} e_{2n+1}\left[f^{(2n+1)}(u+1) + f^{(2n+1)}(u)\right]$$

6°) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère $g(u) = e^{\alpha u}$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\theta \in [0, 1]$ tel que :

$$\frac{2}{1+e^{\alpha}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} e_{2k+1}\alpha^{2k+1} + \theta\, e_{2n+1}\alpha^{2n+1}.$$

b) Montrer que, pour $|\alpha| < 1$, on a :

$$\frac{2}{1+e^{\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} e_n \alpha^n.$$

7°) Soit R le rayon de convergence de la série entière complexe de terme général $e_n z^n$ $(n \in \mathbb{N})$

a) Montrer que $R \geqslant 1$ et calculer $(1+e^z)\left(\sum_{n=0}^{\infty} e_n z^n\right)$ pour $|z| < R$.

b) Montrer que $R \leqslant \pi$.

8°) Soit R′ le rayon de convergence de la série entière réelle de terme général

$$(-1)^{p+1} 2^{2p+1} e_{2p+1} x^{2p+1} \quad (p \in \mathbb{N})$$

Déterminer R′ en fonction de R et calculer la somme de cette série.

9°) On considère la fonction $\psi(x) = \operatorname{tg}(x)$.

a) Montrer que les dérivées successives de ψ sont positives sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) En déduire que la série de Taylor en 0 de ψ converge sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Calculer R.

.../...

II

Soit a, b réels ($a < b$) ; si f est une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ on rappelle que f est intégrable au sens de Riemann si $\mathrm{Re}\, f$ (partie réelle de f) et $\mathrm{Im}\, f$ (partie imaginaire de f) le sont et on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \mathrm{Re}\, f(x)\,dx + i\int_a^b \mathrm{Im}\, f(x)\,dx .$$

Soit ψ une application en escalier de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1°) Montrer que : $\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b \psi(x) \sin \lambda x\,dx = 0$.

2°) En déduire que, si f est une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$, intégrable au sens de Riemann, on a : $\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x\,dx = 0$.

III

Soit E le $\mathbb{C}$ – espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, périodiques de période 1.

Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $f \in E$, on pose $\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t)\, e^{-2i\pi nt}\,dt$.

1°) Montrer que, pour $f \in E$ et $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_a^{a+1} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt .$$

2°) Montrer que, pour $N \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $t \notin \mathbb{Z}$, on a :

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{2i\pi nt} = \frac{\sin (2N+1)\pi t}{\sin \pi t} .$$

3°) Montrer que, pour $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin (2N+1)\pi t}{\sin \pi t}\,dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{\sin (2N+1)\pi t}{\sin \pi t}\,dt = \frac{1}{2} .$$

4°) Soit $f \in E$; pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\, e^{2i\pi nx}$.

a) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tout α, β, $x \in \mathbb{R}$, calculer

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(x+t) - \alpha}{\sin \pi t} \sin (2N+1)\pi t\,dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(x-t) - \beta}{\sin \pi t} \sin (2N+1)\pi t\,dt$$

en fonction de $f_N(x)$, α et β.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que, s'il existe α et β réels tels que les applications $t \to \frac{f(x+t) - \alpha}{\sin \pi t}$ et $t \to \frac{f(x-t) - \beta}{\sin \pi t}$ soient Riemann-intégrables sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a : $\lim_{N \to \infty} f_N(x) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

.../...

c) En déduire que, si f est un élément de E possédant en tout point une demi-dérivée à droite et à gauche, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\lim_{N \to \infty} f_N(x) = f(x)$.

IV

1°) Montrer qu'il existe une suite unique $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de E (ensemble défini dans la partie III) telle que :

(i) pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\varepsilon_k(x) = E_k(2x)$

(ii) pour $p \in \mathbb{N}^*$, ε_{2p} est une fonction impaire
ε_{2p-1} est une fonction paire.

2°) Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, ε_k est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ et admet en $x \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ une demi-dérivée à droite et à gauche.

3°) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\varepsilon_k(0) = 0$.

4°) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, on a :

$$\hat{\varepsilon}_{2p}(n) = -i \int_0^1 E_{2p}(x) \sin \pi n x \, dx$$

$$\hat{\varepsilon}_{2p-1}(n) = \int_0^1 E_{2p-1}(x) \cos \pi n x \, dx .$$

5°) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, on a :

$$\hat{\varepsilon}_{k+1}(n) = \frac{1}{(i \pi n)^k} \hat{\varepsilon}_1(n) .$$

6°) Calculer $\hat{\varepsilon}_1(n)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

7°) a) Montrer, à l'aide de III, que pour tout $x \in [0, 1]$ et $p \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$E_{2p-1}(x) = 4 \frac{(-1)^p}{\pi^{2p}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos (2m+1) \pi x}{(2m+1)^{2p}}$$

$$E_{2p}(x) = 4 \frac{(-1)^p}{\pi^{2p+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin (2m+1) \pi x}{(2m+1)^{2p+1}}$$

b) Calculer $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^{2p}}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ pour $p = 1, 2, 3$.

c) Calculer $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^{2p+1}}$ pour $p = 1, 2$.

FIN